

مبرهنة:

ليكن $X = \prod_{\alpha} X_{\alpha}$ أسرة من الفضاءات الطوبولوجية و X_{α} تكون فضاء الجداء X هو $(T_i - \text{فضاء})$ اذا ونقطة اذا كانت جميع الفضاءات الدوائية X_{α} هي $(T_i - \text{فضاء})$

البرهان:

لنؤم الشرط:

لنقربا ان X هي $(T_i - \text{فضاء})$ واجب ملاحظة سابقة دائما يوجد فضاء جزئي X_{α} من فضاء الجداء X بحيث يكون مكافئا طوبولوجيا اي هو مورمنغ للفضاء الدوائي والذي هو X_{α} و X_{α} واجب الصفة الدوائية ان كل فضاء جزئي من $T_i - \text{فضاء}$ هو $T_i - \text{فضاء}$

يكون الفضاء الجزئي X_{α} هو $(T_i - \text{فضاء})$ واجب الصفة الطوبولوجية والذي هو التكامن الطوبولوجيا يكون الفضاء الدوائي هو $(T_i - \text{فضاء})$ وذلك من اجل اي دليل X .

كفاية الشرط:

نقربا ان جميع الفضاءات الدوائية هي $(T_i - \text{فضاء})$ ولنثبت ان فضاء الجداء X هو $(T_i - \text{فضاء})$.

نأخذ نقطتين مختلفتين x و y من فضاء الجداء هذا يعني انه يوجد دليل s بحيث ان الدوائية $x_s \neq y_s$ في الفضاء الدوائي x_s ولكن بالقرن لدينا x هي $T_i - \text{فضاء}$ ومنه لنا عند تطبيق الدسقاط من الرتبة s

$$p_s : X \rightarrow X_s$$

ان هذا التطبيق مستمر ومتباين ومقرب $T_i - \text{فضاء}$ وبالتالي X هو $T_i - \text{فضاء}$ وذلك حسب مبرهنة سابقة.

ملاحظة:

إننا فضاء القسمة L T_1 فضاء. ليس من الضروري أن يكون T_1 فضاء.

يوضح ذلك مثال سابق هو التالي للتذكر
لأننا فضاء الفضاء الحقيقي المألوف R هذا الفضاء هو T_1 فضاء
بالتالي هو T_1 فضاء و T_0 فضاء

نقطة $x, y \in Q \Leftrightarrow x, y \in P$
أثبتنا عنها أن فضاء القسمة غير متقطع $\{R/P, \emptyset\}$ أو هي T_1 فضاء
طوبولوجيا صنفية وبالتالي فإن الفضاء ليس T_1 فضاء.

الفضاءات الطوبولوجية المترابطة:

تعريف:

ليكن $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ أسرة من المجموعات المفتوحة في X
نقول عن هذه الأسرة أنها تغطية لفضاء X إذا كان

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

وليس الفضاء X فضاء مترابدا إذا كانت أي تغطية مفتوحة
له تحتوي على نقطة هزلية منتهية

مثال:

$$R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}]-n, n[$$

إننا الفضاء R فضاء غير مترابدا.

لأن العبادات $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}]-n, n[$ تشكل تغطية لـ R ، ولكن
لا تحتوي على نقطة هزلية منتهية.

مثال:

لكن X مجموعة غير منتهية وكانت (X, τ) (قوية) عن متراب.

لأن أسرة المجموعات وحيدة النمر تكل تغطية للفصل

$$X \subseteq \bigcup_{x \in X} \{x\}$$

ولكنها لا يمكن أن تحتوي على تغطية جزئية منتهية

تعريف:

نقول عن مجموعة جزئية A من فصل طولوجي X أنها متراب إذا كان الفصل الجزئي A متراب

ملحوظة:

يرهن بحدية أن المجموعة A تكون متراب إذا وفقط إذا كانت أي تغطية مفتوحة لها تحتوي على تغطية جزئية منتهية.

مثال:

أي مجموعة منتهية من فصل طولوجي هي مجموعة متراب.

الحل:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

ولكن $\{U_\alpha\}$ تغطية جزئية منتهية أي أن $A \subseteq U_\alpha$

هذا يعني أنه يوجد $(a_i \in U_{\alpha_i})$ وكذلك الأمر $a_2 \in U_{\alpha_2}$

أي أنه $(a_1 \in U_{\alpha_1})$ (مستبعد من) وفنه نجد أن الأسرة

$$[U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}]$$

تكل تغطية منتهية لهذه المجموعة

مبرهنة (1)

المجموعة المغلقة من الفضاء مترابطة تكون مجموعة مترابطة.
والعكس غير صحيح بالحالة العامة

مبرهنة (2)

المجموعة المترابطة من الفضاء لها وسرون مترابطة هي مجموعة مغلقة

مبرهنة (3)

التطبيق المستمر يحافظ على الترابط. بمعنى أنه:
إذا كان P تطبيقاً مستمراً من الفضاء المترابط X إلى Y فإن
المجموعة $P(X)$ تكون مجموعة مترابطة.
 $f: X \rightarrow Y$

حالة خاصة

إذا كان التطبيق P غامراً ^{و مستمر} عندئذٍ المتقر يكون فضاء مترابطاً
أيضاً

$$f(x) = y$$

نتيجة:

فضاء التتمة من فضاء مترابط هو فضاء مترابط.

البرهان:

لنأخذ التطبيق القانوني

$$p: X \rightarrow pX$$

$$p(x) = [x]$$

إن هذا التطبيق مستمر وغامر وبالتالي pX يكون مترابطاً

مبرهنة: \Leftrightarrow تكون فضاء الجداد X مترابطة \Leftrightarrow كانت جميع الفضاءات
الاجدادية مترابطة

ثمين: (1)

ليكن $\varphi: X \rightarrow Y$

تطبيق مستمر من الفضاء المترابطة X الى فضاء هاوسدورف Y
اثبت ان φ تطبيق مغلقة.

الحل:

لنأخذ مجموعة مغلقة كيفية A من X وبما ان X مترابطة وهي
مغلقة بحسب مبرهنة تكون A مترابطة. (مغلقة من مترابطة مترابطة)
وبما ان φ مستمر والد استمرار يحافظ على الترابط فان $\varphi(A)$ تكون
مترابطة والمترابطة من فضاء هاوسدورف تكون مغلقة. فان
 $\varphi(A)$ مغلقة بالتالي

(A مغلقة و $\varphi(A)$ مغلقة في φ تطبيق مغلقة)

ثمين: (2)

اثبت ان اجتماع عدد منته من المجموعات المترابطة هو مجموعة مترابطة

لنفرض ان A و B مجموعتان مترابطتان من الفضاء X ولنتثبت
ان $A \cup B$ مترابطة لاثبات ذلك:

نأخذ نقطة مفتوحة كيفية U لاجتماع $A \cup B$ طالما
اننا نقطة لاجتماع وفي نقطة لكل منها

بالتالي نجد ان U نقطة مفتوحة لـ A وبما ان A مترابطة فان
هذه النقطة المفتوحة U تحوي على نقطة لـ A منتهية
 $u \in U$ كما ان U نقطة مفتوحة لـ B وبما ان B مترابطة

فإن هذه التقطية تحترق على تقطية هزينة منتصية ، u_1 u_2
ومنها نجد أن (u_1, u_2) تكبد تقطية مفتوحة منتصية $A \cup B$

وبالتالي فإن الدائم متراها.

التراه في الفضاءات المترية:

خاصية (1)

المجموعة المترية في فضاء متري هي مجموعة محدودة

خاصية (2)

كل مجموعة مترية في فضاء متري تكونا مغلقة ومحدودة
والعكس في الحالة العامة غير صحيح.

لكن العكس صحيح في الفضاءات الأقليدية أي الفضاء R^n

« A مترية $\iff A$ مغلقة ومحدودة »

أي مجال مغلقة في R هو مجموعة مترية

R غير مترية لأنه غير محدود

Q غير مترية في R لأنها غير محدودة وغير مغلقة

Z غير مترية في R لأنها غير محدودة

المجال المفتوح $[2, 7]$ غير مترية لأنه غير محدود وغير مغلقة